BLOQUE III: CÁLCULO INTEGRAL.

TEMA 8_1
INTEGRAL INDEFINIDA.
CÁLCULO DE PRIMITIVAS

RESUMEN TEÓRICO

1. CÁLCULO DE PRIMITIVAS. INTEGRAL INDEFINIDA....................................3
2. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN..4
2.1. Integración inmediata..4
2.2. Integración por partes. 6
2.3. Integración de funciones racionales. 10
2.4. Integración por cambio de variable...15

1. CÁLCULO DE PRIMITIVAS. INTEGRAL INDEFINIDA

DEFINICION 1. Dada una función real de variable real

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$$
$$x\to f(x)$$

Llamaremos función primitiva de $f(x)$ a una función $F(x)$ tal que $F'(x)=f(x)$.

EJEMPLO 1. Dada la función $f(x)=18x^2$ se verifica que $F(x)=6x^3$ es una primitiva de $f(x)$.

Esto es fácil de comprobar ya que si derivamos la función $F(x)=6x^3$ obtenemos la función $f(x)=18x^2$

$$F'(x)=18x^2=f(x)$$

PROPIEDAD 1. Dada una función $f(x)$ y $F(x)$ una función primitiva de $f(x)$ Se verifica que $F(x)+C$ siendo C cualquier constante real, también es una función primitiva de $f(x)$. Además se verifica que cualquier función primitiva de $f(x)$ es de la forma que $F(x)+C$

Esta propiedad es obvia ya que la derivada de una constante es cero y por tanto al derivar la función $F(x)+C$ coincide con la derivada de $F(x)$. Esto es,

$$(F(x)+C)'=F'(x)+C'=F'(x)+0=F'(x)=f(x)$$

EJEMPLO 2. Las funciones $F_1(x)=6x^3+7$ y $F_2(x)=6x^3+5$ son funciones primitivas de $f(x)=18x^2$.

Si derivamos ambas funciones obtenemos la misma función

$$F_1(x)=6x^3+4\to F_1'(x)=18x^2=f(x)$$

$$F_2(x)=6x^3+7\to F_2'(x)=18x^2=f(x)$$

Observación: Por tanto una función puede poseer un conjunto de infinitas funciones primitivas, ya que si encontramos una primitiva de la función, podemos obtener otra función primitiva sumándole una constante.

DEFINICION 2. (Integral indefinida). Denominaremos integral indefinida de una función $f(x)$ y denotaremos por $\int f(x)dx$ al conjunto de sus funciones primitivas. Esto es, al conjunto de funciones cuya derivada es la función dada $f(x)$.

Según la propiedad anterior podemos escribir la integral indefinida como:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad \forall C \in \mathbf{R} \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Observación: Podemos entender la integración indefinida como el proceso o la operación inversa a la derivación y por tanto se verificara las propiedades de linealidad.

PROPIEDAD 2. a) La integral indefinida de una suma de funciones es la suma de las integrales indefinidas

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)\,dx$$

b) La integral indefinida del producto de una función por una constante es el producto de la constante por la integral indefinida de la función.

$$\int k\ f(x)dx = k \cdot \int f(x)\,dx, \quad \forall k \in \mathbf{R}$$

2. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

A continuación explicaremos algunos de los métodos de integración más habituales.

2.1. Integración inmediata.

Podemos decir que una integral es inmediata cuando la función que hemos de integrar sea la derivada de una función conocida. En la práctica existe lo que se denominan las tablas de integrales inmediatas que es una relación de este tipo de funciones.

PROPIEDAD 3. (Tabla de integrales inmediatas) Se verifican las siguientes integrales.

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS

1.	$\int k \cdot dx = kx + C$	
2.	$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq -1$	$\int \left[f(x) \right]^n \cdot f'(x) dx = \dfrac{\left[f(x) \right]^{n+1}}{n+1} + C$
3.	$\int \dfrac{1}{x} dx = L\mid x \mid + C$	$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx = L\mid f(x) \mid + C$
4.	$\int \dfrac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$	$\int \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = \sqrt{f(x)} + C$
5.	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{La} + C$ siendo $a \in I\!R$	$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \dfrac{a^{f(x)}}{La} + C$
6	$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + C$
7	$\int senx dx = -\cos x + C$	$\int sen\, f(x) \cdot f'(x) dx = -\cos\, f(x) + C$
8	$\int \cos x dx = senx + C$	$\int \cos\, f(x) \cdot f'(x) dx = sen\, f(x) + C$
9	$\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = arctgx + C$	$\int \dfrac{f'(x)}{1+\left[f(x) \right]^2} dx = arctg\, f(x) + C$
10	$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsenx + C$	$\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-\left[f(x) \right]^2}} dx = arcsen\, f(x) + C$

EJEMPLO 3. Calcular $\int (x^3+3x)^4 \cdot (x^2+1)\, dx$

Podemos observar que si consideramos la función $f(x) = x^3 + 3x$ y calculamos $f'(x) = 3x^2 + 3$, multiplicando por un tercio la integral que queremos calcular coincide con el tipo 2. de la tabla de integrales inmediatas (con n=4)

$$\int (x^3+3x)^4 \cdot (x^2+1)\, dx = \frac{1}{3}\int (x^3+3x)^4 \cdot 3(x^2+1)\, dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int (x^3+3x)^4 \cdot (3x^2+3)\, dx = \frac{1}{3}\frac{(x^3+3x)^5}{5} + C$$

EJEMPLO 4. Calcular $\int \frac{x^3+1}{x^4+4x+5}dx$

Si consideramos la función $f(x) = x^4 + 4x + 5$ y calculamos $f'(x) = 4x^3 + 4$, multiplicando por un cuarto la integral que queremos calcular coincide con el tipo 3. de la tabla de integrales inmediatas. Por tanto

$$\int \frac{x^3+1}{x^4+4x+5}dx = \frac{1}{4}L(x^4+4x+5)+C$$

EJEMPLO 5. Calcular $\int e^{2x^2} \cdot 8x\,dx$

Dado que si llamamos $f(x) = 2x^2$ se verifica que $f'(x) = 4x$ entonces, podemos escribir la integral que queremos calcular como una función exponencial por la derivada del exponente (Integral inmediata tipo 6.)

$$\int e^{2x^2} \cdot 8x\,dx = \int e^{2x^2} \cdot 2 \cdot 4x\,dx = 2\int e^{2x^2} \cdot 4x\,dx = 2e^{2x^2} + C$$

EJEMPLO 6. Calcular $\int \frac{1}{1+4x^2}dx$

La integral que queremos calcular es del tipo 9. si tomamos $f(x) = 2x$ y dividimos la integral por 2.

$$\int \frac{1}{1+4x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{1+4x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{1+(2x)^2}dx = \frac{1}{2}arctg(2x)+C$$

NOTA IMPORTATANTE: En la bibliografía recomendada en la guía docente, se puede encontrar múltiples de ejemplos de integrales inmediatas de cada uno de los tipos que se han incluido en la tabla anterior.

2.2. Integración por partes.

Este método se basa en la regla de derivación del producto de dos funciones:

$$(u \cdot v)' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

Si integramos la anterior expresión:

$$\int (u \cdot v)'dx = \int (u \cdot v' + v \cdot u')dx$$

$$u \cdot v = \int u \cdot v'\,dx + \int v \cdot u'\,dx$$

Despejando de la expresión anterior y denotando $dv = v'dx$ y $du = u'dx$, se obtiene la denominada regla de integración por partes:

PROPIEDAD 4. Dadas dos funciones u y v se verifica que:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Con este método se pretende calcular una integral dada (la de la izquierda) convirtiéndola en el cálculo de una integral inmediata (la de la derecha).

EJEMPLO 7. Calcular $\int x\, Lx\, dx$

Denotemos por $u = Lx$ y $dv = xdx$ y calculemos respectivamente la derivada de u y la integral de dv

$$\text{Si } u = Lx \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$$

$$\text{Si } dv = xdx \Rightarrow v = \int xdx = \frac{x^2}{2}$$

Según hemos definido las funciones u y dv la integral que queremos calcular es la integral del producto udv. Por tanto si aplicamos la propiedad de la integración por partes se verifica que

$$\int x\, Lx\, dx = Lx \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx$$

Realizando alguna simplificación la integral del lado derecho de la igualdad es inmediata:

$$\int x\, Lx\, dx = Lx \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x}{2} dx = Lx \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int xdx =$$

$$= Lx \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C = Lx \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

Por tanto se verifica que:

$$\int x\, Lx\, dx = \frac{x^2}{2} Lx \cdot - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{2}\left[Lx - \frac{1}{2}\right] + C$$

EJEMPLO 8. Calcular $\int (x^2+1)e^x\, dx$

Esta integral puede ser resuelta por partes si consideramos:

$$u = (x^2+1)$$

$$dv = e^x dx$$

Al calcular respectivamente la derivada de u y la integral de dv obtenemos

Si $u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2xdx$

Si $dv = e^x dx \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x$

Sustituyendo en la integral y aplicando la integración por partes:

$$\int \underbrace{(x^2+1)}_{u}\underbrace{e^x\, dx}_{dv} = \underbrace{(x^2+1)}_{u}\underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{2x}_{dv}\underbrace{e^x}_{u}\, dx$$

La integral que tenemos que calcular (la del lado derecho) no es inmediata, pero podemos resolverla aplicando nuevamente la integración por partes. En este caso denotaremos:

$$u = 2x$$
$$dv = e^x dx$$

Se verifica que:

$$\text{Si } \ u = 2x \Rightarrow du = 2dx$$
$$\text{Si } \ dv = e^x dx \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x$$

Sustituyendo:

$$\int (x^2+1)e^x\, dx = (x^2+1)e^x - \int 2xe^x dx = (x^2+1)e^x - \left(2xe^x - \int 2e^x dx\right) =$$
$$=(x^2+1)e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx = (x^2+1)e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

En resumen:

$$\int (x^2+1)e^x\, dx = (x^2+1)e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

EJEMPLO 9. Calcular $\int e^x \cos x\, dx$

Esta integral puede ser resuelta por partes si consideramos:

$$u = \cos x$$
$$dv = e^x dx$$

Al calcular respectivamente la derivada de u y la integral de dv obtenemos

$$\text{Si } \ u = \cos x \Rightarrow du = -\text{sen } x dx$$
$$\text{Si } \ dv = e^x dx \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x$$

Sustituyendo en la integral y aplicando la integración por partes:

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x - \int -e^x \text{sen } x\, dx = e^x \cos x + \int e^x \text{sen } x\, dx$$

Volviendo a aplicar por partes para resolver la integral del lado derecho de la igualdad

$$\text{Si } \ u = \text{sen } x \Rightarrow du = \cos x\, dx$$
$$\text{Si } \ dv = e^x dx \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x$$

Sustituyendo:

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + e^x \text{sen } x - \int e^x \cos x\, dx$$

Podemos observar que la integral de la derecha de la igualdad es la misma integral que la que originalmente queríamos calcular (la de la izquierda). Pero al estar restando en la parte derecha de la igualdad podemos resolver la integral despejando dicha integral de la igualdad que tenemos:

$$\int e^x \cos x\, dx + \int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$$

$$2\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$$

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x}{2}$$

Si añadimos la constante de integración tenemos resuelta la integral deseada:

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x}{2} + C$$

2.3. Integración de funciones racionales.

DEFINICION 3. una función racional es el cociente de dos polinomios en x.

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

siendo $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios.

<u>EJEMPLOS: (integrales racionales inmediatas)</u>

- Si $p(x) = 1$ y $q(x) = (x-a)$ siendo $a \in \mathbb{R}$

$\int \frac{dx}{x-a} = L\left|x-a\right| + C$; (ejemplo) $\int \frac{dx}{x+2} = L\left|x+2\right| + C$

- Si $p(x) = 1$ y $q(x) = (x-a)^n$ siendo $n > 1$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int (x-a)^{-n} dx = \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{1}{(-n+1)(x-a)^{n-1}} + C$$

(ejemplo) $\int \frac{dx}{(x-5)^3} = \int (x-5)^{-3} dx = \frac{(x-5)^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{(x-5)^{-2}}{-2} + C = \frac{-1}{2(x-5)^2} + C$

<u>Reducción de funciones racionales</u>

El método general que estudiaremos a continuación supone que el grado del numerador es inferior al del denominador. Si no ocurriera así, es decir si el grado de $p(x)$ fuera mayor o igual que el grado de $q(x)$. Procederíamos como sigue:

Realizando la división entre $p(x)$ y $q(x)$ se obtiene que:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

siendo $c(x)$ el polinomio cociente y $r(x)$ el polinomio resto de la división.

Por tanto la integral nos quedara de la forma:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int c(x) dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx$$

La primera de las integrales del lado derecho es inmediata al tratarse de la integral de un polinomio y el segundo sumando es una integral de una función racional en la que el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

EJEMPLO 10. Calcular $\int \frac{x^4 - 19x}{x^2 - 2x - 3} dx$

Dado que el grado del polinomio del numerador es 4, mayor que el del denominador (2), tenemos que realizar la división:

$$\begin{array}{rl}
x^4 \qquad\qquad -19x & \underline{|\,x^2 - 2x - 3} \\
-x^4 + 2x^3 + 3x^2 \qquad\qquad & x^2 + 2x + 7 \\
\hline
+2x^3 + 3x^2 - 19x & \\
-2x^3 + 4x^2 + 6x & \\
\hline
7x^2 - 13x & \\
-7x^2 + 14x + 21 & \\
\hline
x + 21 &
\end{array}$$

Por tanto, la integral que queremos calcular se puede sustituir por

$$\int \frac{x^4 - 19x}{x^2 - 2x - 3} dx = \int (x^2 + 2x + 7) dx + \int \frac{x + 21}{x^2 - 2x - 3} dx$$

$$\int \frac{x^4 - 19x}{x^2 - 2x - 3} dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 7x + \int \frac{x + 21}{x^2 - 2x - 3} dx$$

<u>Método general (</u> Si el grado de p(x) menor que el grado de q(x)

Se calculan todas las raíces del denominador (soluciones de la ecuación q(x)=0)

Pueden aparecer:

a) Raíces reales con multiplicidad 1

Por cada raíz real simple (a) se añade un término: $\frac{A}{x-a}$

b) Raíces reales con multiplicidad mayor que 1

Por cada raíz real doble (b) se añaden dos términos $\frac{B}{x-b}$ y $\frac{C}{(x-b)^2}$

Por cada raíz real triple (c) se añaden tres términos $\frac{D}{x-c}$, $\frac{E}{(x-c)^2}$ y $\frac{F}{(x-c)^3}$

Y así sucesivamente

c) Raíces complejas

Las raíces complejas (conjugadas) proceden de un polinomio de segundo grado R(x) en cuya solución encontramos raíces cuadradas negativas. Por cada raíz compleja se añade un término: $\frac{Gx+H}{R(x)}$

El cociente P(x)/Q(x) se puede escribir como suma de los términos anteriores (sólo hay que obtener los coeficientes) A, B, C,......

EJEMPLO

Calcular $\int \frac{5x^2-17}{x^3-2x^2-x+2}dx$

Calculando las raíces del polinomio denominador se obtiene que son $x=1$, $x=-1$ y $x=2$, todas ellas reales con multiplicidad 1.

$x^3-2x^2-x+2=(x-1)(x+1)(x-2)$

Por tanto podemos descomponer el cociente como:

$$\frac{5x^2-17}{x^3-2x^2-x+2}=\frac{5x^2-17}{(x-1)(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}$$

Si operamos en el lado de derecho de la igualdad se obtiene que

$$\frac{5x^2-17}{(x-1)(x+1)(x-2)}=\frac{A(x+1)(x-2)+B(x-1)(x-2)+C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x-2)}$$

Al igualar los numeradores se obtiene que:

$$5x^2 - 17 = A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+1)$$
$$5x^2 - 17 = A(x^2 - x - 2) + B(x^2 - 3x + 2) + C(x^2 - 1)$$
$$5x^2 - 17 = (A + B + C)x^2 + (-A - 3B) - 2A + 2B - C$$

Igualando los coeficientes de mismo grado, se verifica que:

$$\begin{cases} 5 = A + B + C & \text{(coeficiente de } x^2\text{)} \\ 0 = -A - 3B & \text{(coeficiente de } x\text{)} \\ -17 = -2A + 2B - C & \text{(términos independientes)} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema (lineal), podemos calcular las constantes A, B y C.

$A = 6$, $B = -2$, $C = 1$

Sustituyendo los valores obtenidos en la función integrando igualada la función descompuesta en suma de funciones tipo 1, tenemos que:

$$\int \frac{5x^2 - 17}{x^3 - 2x^2 - x + 2}\,dx = \int \frac{6}{x-1}dx + \int \frac{-2}{x+1}dx + \int \frac{1}{x-2}\,dx$$
$$\int \frac{5x^2 - 17}{x^3 - 2x^2 - x + 2}\,dx = 6L\left|x-1\right| - 2L\left|x+1\right| + L\left|x-2\right| + C$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos, podemos simplificar la solución:

$$\int \frac{5x^2 - 17}{x^3 - 2x^2 - x + 2}\,dx = L\left|\frac{(x-1)^6(x-2)}{(x+1)^2}\right| + C$$

EJEMPLO

Calcular $\int \frac{2x+1}{x^3 - 3x + 2}\,dx$

Calculando las raíces del polinomio denominador se obtiene que son x=1 con multiplicidad 2 y x=-2 con multiplicad 1. Por tanto el denominador es:

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$$

Podemos descomponer el integrando como:

$$\frac{2x+1}{x^3 - 3x + 2} = \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Si operamos en el lado de derecho de la igualdad se obtiene que

$$\frac{2x+1}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + B(x+2)(x-1) + C(x+2)}{(x+2)(x-1)^2}$$

Al igualar los numeradores se obtiene que:

$$2x+1 = A(x-1)^2 + B(x+2)(x-1) + C(x+2)$$
$$2x+1 = A(x^2-2x+1) + B(x^2+2x-x-2) + C(x+2)$$
$$2x+1 = (A+B)x^2 + (-2A+B+C)x + (A-2B+2C\ )$$

Igualando los coeficientes de mismo grado, se verifica que:

$$\begin{cases} 0 = A+B & \text{(coeficiente de x}^2\text{)} \\ 2 = -2A+B+C & \text{(coeficiente de x)} \\ 1 = A-2B+2C & \text{(términos independientes)} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema lineal anterior, podemos calcular las constantes A, B y C.

$$A = -\frac{1}{3},\ B = \frac{1}{3},\ C = 1$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la función integrando igualada la función descompuesta en suma de funciones tipo 1 y tipo 2, tenemos que:

$$\int \frac{2x+1}{(x-1)^2(x+2)}dx = \int\left(\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}\right)dx$$
$$\int \frac{2x+1}{(x-1)^2(x+2)}dx = \int \frac{-1/3}{x+2}dx + \int \frac{1/3}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx$$
$$\int \frac{2x+1}{(x-1)^2(x+2)}dx = \frac{-1}{3}L|x+2| + \frac{1}{3}L|x-1| + \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C$$
$$\int \frac{2x+1}{(x-1)^2(x+2)}dx = L\left|\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}}\right| - \frac{1}{(x-1)} + C$$

EJEMPLO 10

Para calcular la integral resultante del ejemplo 10.

$$\int \frac{x+21}{x^2-2x-3}dx$$

Calculemos las raíces del denominador y descompongámosla en suma de integrales

$$x^2-2x-3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{x+21}{x^2-2x-3} = \frac{x+21}{(x+1)(x-3)}$$

$$\frac{x+21}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-3)}$$

El calculo de los valores de las constantes A y B se realizar operando e igualando los coeficientes de igual grados de ambos denominadores

$$\frac{x+21}{(x+1)(x-3)}=\frac{A(x-3)+B(x+1)}{(x+1)(x-3)}\Rightarrow$$

$$x+21=A(x-3)+B(x+1)$$
$$x+21=(A+B)x-3A+B$$

Por tanto, se verifica que:

$$\left.\begin{array}{l} 1=A+B \\ 21=-3A+B \end{array}\right\}\Rightarrow A=-5 \text{ y } B=6$$

En consecuencia:

$$\int\frac{x+21}{x^2-2x-3}dx=\int\frac{-5}{(x+1)}dx+\int\frac{6}{(x-3)}dx$$

$$\int\frac{x+21}{x^2-2x-3}dx=-5L\left|x+1\right|+6L\left|x-3\right|+C$$

Retomando la integral inicial obtenemos que

$$\int\frac{x^4-19x}{x^2-2x-3}dx=\frac{x^3}{3}+x^2+7x-5L\left|x+1\right|+6L\left|x-3\right|+C$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos, podemos simplificar la solución:

$$\int\frac{x^4-19x}{x^2-2x-3}dx=\frac{x^3}{3}+x^2+7x+L\left|\frac{(x-3)^6}{(x+1)^5}\right|+C$$

2.4. Integración por cambio de variable.

Cuando la integral no se adapte a ninguno de los métodos anteriores nos queda la opción de realizar un cambio de variable (llamando *t* a una función de la variable *x*), para transformarla en otra que sí se adapte. Resuelta la integral, volveremos a la variable inicial para dar la solución final.

Esta regla de integración se basa en la propiedad de la derivada de la composición de funciones. Sabemos que se verifica que:

$$\left[f(g(x))\right]'=f'\left(g(x)\right)g'(x)$$

Si integramos a los dos de la igualdad (en el lado izquierdo nos queda la función compuesta), se verifica la siguiente propiedad

PROPIEDAD 5. Dadas dos funciones f y g se verifica que

$$f(g(x))=\int f'\left(g(x)\right)g'(x)dx$$

Nota: Si denotamos $t = g(x)$ se verifica que $dt = g'(x)dx$ y por tanto la propiedad anterior es trivial: $f(t) = \int f'(t)\,dt$

EJEMPLO 11. Calcular $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

Dado que $e^{2x} = (e^x)^2$ entonces: $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}dx$

Para resolver esta integral podemos realizar el siguiente cambio de variable. Si denotemos como $t = e^x$ se verifica que

$$t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$$

Al sustituir en la integral se obtiene que

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}dx = \int \frac{t}{1+t^2}\cdot\frac{dt}{t} = \underbrace{\int \frac{1}{1+t^2}dt}_{\text{Integral inmediata}} = arc\ tg\ t + C$$

Deshaciendo el cambio de variable obtenemos la solución de la integral en función de la variable x.

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = arc\ tg\ (e^x) + C$$

EJEMPLO 12. Calcular $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$

Denotando las raíces como potencias, se verifica que:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{x^{1/2}}{1+x^{1/3}}dx$$

En este tipo de integrales se realiza el siguiente cambio de variable[1]. Si denotemos como $x = t^6$ se verifica que:

[1] En general se toma $x = t^m$ siendo m el mínimo comun multiplo de los indices de la raices de x. En este caso, m=6= m.c.m(2,3)

$$\text{Si } x = t^6 \Rightarrow \begin{cases} x^{1/6} = t \\ x^{1/2} = t^3 \\ x^{1/3} = t^2 \\ dx = 6t^5 dt \end{cases}$$

Sustituyendo en la integral

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{x^{1/2}}{1+x^{1/3}}dx = \int \frac{t^3}{1+t^2}6t^5dt = \int \frac{6t^8}{1+t^2}dt$$

Hemos obtenido la integral de una ecuación racional que si realizamos la división del integrado (al ser de numerador de mayor grado que el denominador) obtenemos:

$$6\int \frac{t^8}{t^2+1}dt = 6\int (t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2})dt$$

Resolviendo la integral de cada sumando, al tratarse de integrales inmediatas:

$$= 6\int \frac{t^8}{t^2+1}dt = 6\left[\int (t^6 - t^4 + t^2 - 1)\,dt + \int \frac{1}{1+t^2}dt\right] = 6\left[\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + arc\ tg\ t\right] + C$$

Para finalizar deshacemos el cambio de variable:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx = 6\left[\frac{x^{7/6}}{7} - \frac{x^{5/6}}{5} + \frac{x^{3/6}}{3} - x^{1/6} + arc\ tg\ (x^{1/6})\right] + C$$

Ejemplo:

Calcular $\int (x-4)\sqrt{(1-3x)}dx$

Intentemos resolver esta integral mediante un cambio de variable:

$$t = \sqrt{1-3x} \Rightarrow t^2 = 1-3x \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1-t^2}{3} \\ dx = \dfrac{1}{3}(-2t)dt = -\dfrac{2}{3}tdt \end{cases}$$

Sustituyendo en la integral:

$$\int (x-4)\sqrt{(1-3x)}dx = \int \left(\frac{1-t^2}{3} - 4\right)\cdot t \cdot \frac{-2}{3}tdt = \frac{-2}{3}\int \frac{1-t^2-12}{3}\cdot t^2 dt$$

$$= \frac{-2}{9}\int (-11-t^2)t^2dt = \frac{2}{9}\int (11t^2 + t^4)dt = = \frac{2}{9}\left[11\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right] + C = \frac{22t^3}{27} + \frac{2t^5}{45} + C$$

Retomando la variable inicial x, la solución es:

$$\int (x-4)\sqrt{(1-3x)}dx = \frac{22\sqrt{(1-3x)^3}}{27} + \frac{2\sqrt{(1-3x)^5}}{45} + C$$